$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)=\varphi(x)\quad, \tag{2.3}$$

то тем самым заданы начальные условия задачи. Если граничные условия не заданы, то это значит, что мы имеем дело с бесконечной струной. Совокупность уравнения (2.1) и начальных условий (2.2), (2.3) называется задачей Коши для бесконечной струны.

Одним из методов решения этой задачи Коши есть метод Даламбера. В основе его лежит тот факт, что с помощью замены $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ уравнение (2.1) преобразуется к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, которое имеет общее решение $u(\xi,\eta)=\Phi(\xi)+F(\eta)$. Для определения функций $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ используются начальные условия (а для некоторых задач и граничные условия).

Если вернуться к старым переменным x и t, то

$$u(x,t)=\Phi(x+at)+F(x-at)\quad.$$

Если рассматривается задача Коши для бесконечной струны $(-\infty < x < \infty)$, то по заданным начальным условиям (2.2) и (2.3) определяются функции Φ и F, и искомое решение выражается формулой Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x-at)+f(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(z)dz \tag{2.4}$$

П р и м е р. Методом Даламбера найти уравнение $u=u(x,t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если в начальный момент форма струны и скорость точки струны с абсциссой x определяются следующими условиями:

$$u\Big|_{t=0}=u(x,0)=\frac{\sin x}{x},\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u'(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$$

Р е ш е н и е. Для решения задачи применим формулу (2.4):

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x-at)}{x-at}+\frac{\sin(x+at)}{x+at}\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=\frac{2x\sin x\cos at-2at\sin at\cos x}{2(x^2-a^2t^2)}+\frac{1}{2a}\big(\operatorname{arctg}(x+at)-\operatorname{arctg}(x-at)\big)=$$

$$=\frac{x\sin x\cos at-at\sin at\cos x}{x^2-a^2t^2}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2at}{1+x^2-a^2t^2}$$

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

К.р. №6

Задача 1

Установить, какие множества точек комплексной плоскоскости определяется заданными условиями a) и b); изобразить эти множества на рисунках.

11.1.0 a) $|z+i|<2;\quad 0<Re\,z\le 1.$ b) $|z-i|=|z+2i|$

11.1.1 a) $1\le|z-i|<2;\quad Re\,z<0;\quad Im\,z>1.$ b) $\left|\frac{z-3}{z+2i}\right|=1$

11.1.2 a) $|z+i|>1;\quad -\frac{\pi}{4}\le \arg z<0.$ b) $Re\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$

11.1.3 a) $|z-1-i|<2;\quad |\arg z|\le\frac{\pi}{4}.$ b) $Re(\bar z)^2=1$

11.1.4 a) $|z-2-i|\ge 1;\quad 1\le Re\,z<3;\quad 0<Im\,z\le 3$

b) $|z|-3\,Im\,z=6$

11.1.5 a) $|z+i|\ge 1;\quad |z|<2.$ b) $Im\overline{(z^2-z)}=2-Im\,z$

11.1.6 a) $|z-2-i|\le 2;\quad Re\,z\ge 3;\quad Im\,z<1.$ b) $Im\dfrac{z+1}{z+i}=0$

11.1.7 a) $|z-1-i|\ge 1;\quad 0\le Re\,z<2;\quad 0<Im\,z\le 2.$

b) $|z+2i|=|z-2|$

11.1.8 a) $1<z\cdot\bar{z}<2;\quad Re\,z>0;\quad 0\le Im\,z\le 1.$ b) $Re(1+z)=|z|$

11.1.9 a) $|z+i|>1;\quad -\dfrac{\pi}{4}\le \arg z<0.$ b) $Re\left(z^2-\bar{z}\right)=0$

Задача 2

Восстановить аналитическую функцию $w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ по её действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ и известному значению $f(z_0)$:

11.2.0 $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y;\quad f(0)=0.$

11.2.1 $v(x,y)=2xy-x+3y+1;\quad f(0)=i.$

11.2.2 $u(x,y)=x^3-3xy^2-2x+y+1;\quad f(0)=1.$

11.2.3 $u(x,y)=x^2-y^2+y-2;\quad f(-1)=3.$

11.2.4 $v(x,y)=3x^2y-y^3-x-2y;\quad f(0)=1.$

11.2.5 $u(x,y)=e^{2x+1}\cos 2y;\quad f(0)=e.$

11.2.6 $v(x,y)=2e^x\cos y;\quad f(0)=2(1+i).$

11.2.7 $u(x,y)=2x^3-6xy^2-3x^2y+y^3;\quad f(0)=0.$

11.2.8 $u(x,y)=e^x\cos(y+1);\quad f(-i)=1.$

11.2.9 $v(x,y)=2xy+3y-x+1;\quad f(0)=i.$

Задача 3

1) Выяснить, какая часть комплексной плоскости сжимается и какая растягивается, если отображение осуществляется заданной

функцией $w=f(z)$;

2) Найти угол поворота φ и коэффициент растяжения (сжатия) k в точке z_0 при отображении $w=f(z)$.

11.3.0 $f(z)=z^2+2z;\quad z_0=i.$ 11.3.1 $f(z)=-\dfrac{2}{z};\quad z_0=-2i.$

11.3.2 $f(z)=e^{z-1};\quad z_0=2+i\dfrac{\pi}{6}.$ 11.3.3 $f(z)=-iz^2;\quad z_0=2i.$

11.3.4 $f(z)=e^{iz};\quad z_0=-i.$ 11.3.5 $f(z)=z^2-2iz;\quad z_0=1.$

11.3.6 $f(z)=-ie^{-z};\quad z_0=-1.$ 11.3.7 $f(z)=z(z-1);$

$z_0=-\dfrac{1}{2}i.$

11.3.8 $f(z)=3z^2+2z;\quad z_0=-\dfrac{1}{3}i.$ 11.3.9 $f(z)=\dfrac{z+1}{z};\quad z_0=\dfrac{1}{2}.$

Задача 4

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

11.4.0 $\int\limits_L (z+1)e^z\,dz;\quad L:\{|z|=1,\quad Re\,z\ge 0\}$

11.4.1 $\int\limits_{AB} Im\,z^3\,dz;$ AB – отрезок прямой $z_A=0,\ z_B=2+2i$

11.4.2 $\int\limits_{AB} z\,Re\,z^2\,dz;$ AB – отрезок прямой $z_A=0,\ z_B=1+2i.$

11.4.3 $\int\limits_{ABC} (z^2+\sin z)\,dz;$ ABC – ломаная, $z_A=0,\ z_B=1,\ z_C=2i.$

11.4.4 $\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\,Re\,z\,dz;$ AB – отрезок прямой $z_A=1+i,\ z_B=0.$

11.4.5 $\int\limits_L (\sin iz+z)\,dz;\quad L:\{|z|=1,\ Re\,z\ge 0\}.$

11.4.6 $\int\limits_{ABC} Re\frac{\bar{z}}{z}dz$; $AB: \{|z| = 1, Im\, z \geq 0\}$, BC – отрезок, $z_B = 1, z_C = 2$.

11.4.7 $\int\limits_{ABC}(chz + \cos iz)dz$; ABC – ломаная, $z_A = 0, z_B = -1, z_C = i$.

11.4.8 $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz$; ABC – ломаная, $z_A = i, z_B = 1, z_C = 0$.

11.4.9 $\int\limits_{L}\frac{\bar{z}}{z}dz$; L – граница области : $\{1 < |z| < 2, Re\, z > 0\}$.

Задача 5

Вычислить контурный интеграл двумя способами:

a) с помощью интегральной формулы Коши или производной интеграла Коши;

b) с помощью основной теоремы о вычетах.

11.5.0 $\oint\limits_{L}\frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz$, $L: |z| = 3$

11.5.1 $\oint\limits_{L}\frac{z^2+1}{(z+1)(z-2)^2}dz$, $L: |z| = 2{,}5$

11.5.2 $\oint\limits_{L}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+3)^2}dz$, $L: |z| = 2$

11.5.3 $\oint\limits_{L}\frac{e^{2z}}{z^3 - iz^2}dz$, $L: |z| = 1{,}5$

11.5.4 $\oint\limits_{L}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{6})(z-\pi)^2}dz$, $L: |z-2| = 2$

11.5.5 $\oint\limits_{L}\frac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$, $L: |z+\pi| = 2$

11.5.6 $\oint\limits_{L}\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz$, $L: |z-i| = 1{,}5$

11.5.7 $\oint\limits_{L}\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2(z-i)}dz$, $L: |z+i| = 1{,}5$

11.5.8 $\oint\limits_{L}\frac{e^{iz}-1}{z^3 - z^2\pi}dz$, $L: |z-\pi| = 4$

11.5.9 $\oint\limits_{L}\frac{e^{z-i}}{(z^2+4)(z+i)}dz$, $L: |z+i| = 2{,}5$

Задача 6

Используя теоремы о вычетах, вычислить определённый или несобственный интеграл:

11.6.0 $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\cos t)^2}$;

11.6.1 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$;

11.6.2 $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)^3}dx$;

11.6.3 $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sin t+5}$;

11.6.4 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)\left(x^2+1\right)^2}$;

11.6.5 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx$;

11.6.6 $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}$;

11.6.7 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)\left(x^2+1\right)^2}$;

11.6.8 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$;

11.6.9 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+10}{\left(x^2+4\right)^2}dx$;

Задача 7

Найти изображение следующего оригинала:

11.7.0 $f(t)=(4t^2+2t-10)e^{-t}$; 11.7.1 $f(t)=\dfrac{e^{-t}-1}{t}$;

11.7.2 $f(t)=t^2+5t\sin 3t$; 11.7.3 $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$;

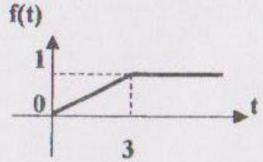
11.7.4 $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{-\tau}d\tau$; 11.7.5 $f(t)=e^{2t}\cos^2 t$;

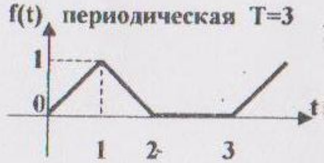
11.7.6 $f(t)=\sin t * \cos t$; 11.7.7 $f(t)=e^{-2t}(1+2t)^2$;

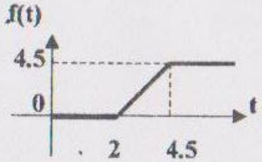
11.7.8 $f(t)=e^{-3t}\cos 3t\sin 2t$; 11.7.9 $f(t)=e^{3(t-1)}\sin(t-1)$;

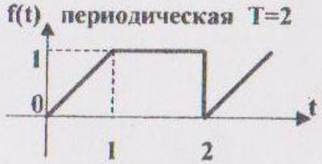
Задача 8

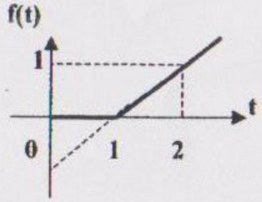
Найти изображение оригинала, заданного графически:

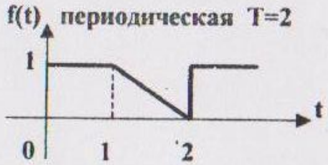
11.8.0 

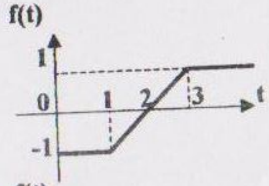
11.8.1 

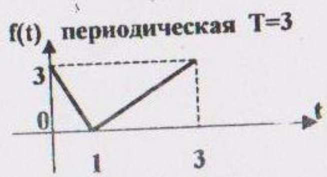
11.8.2 

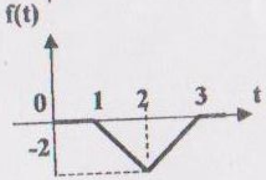
11.8.3 

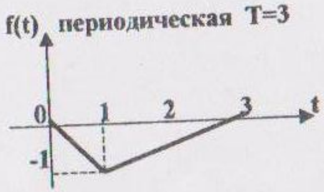
11.8.4 

11.8.5 

11.8.6 

11.8.7 

11.8.8 

11.8.9 

Задача 9

Найти оригиналы по заданным изображениям:

11.9.0 a) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-3p+2}$; b) $F(p)=\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$;

11.9.1 a) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2-4p+5}$; b) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}$;

11.9.2 a) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2-2p+5}$; b) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p+9)}$;

11.9.3 a) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+2p+2}$; b) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$;

11.9.4 a) $F(p)=\dfrac{5p+3}{p^2+4p+8}$; b) $F(p)=\dfrac{pe^{-3p}}{p^2-4}$;

11.9.5 a) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-4p+3}$; b) $F(p)=\dfrac{pe^{-p}}{p^2+1}$;

11.9.6 a) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)^2}$; b) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p(p^2+1)}$;

11.9.7 a) $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)^2(p+2)}$; b) $F(p) = \dfrac{6e^{-2p}}{p^4}$;

11.9.8 a) $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)^2}$; b) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2-9}$;

11.9.9 a) $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p^2-4p+4)}$; b) $F(p) = \dfrac{e^{-4p}}{p^2+p+2}$;

Задача 10

С помощью операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях:

11.10.0 $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3, y'(0) = 1.$

11.10.1 $y'' - y' = t^2$ $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

11.10.2 $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = -2.$

11.10.3 $y'' - y = \cos 3t$ $y(0) = 1, y'(0) = 1.$

11.10.4 $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 4.$

11.10.5 $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$, $y(0) = 1, y'(0) = 1.$

11.10.6 $2y'' - y' = \sin t$, $y(0) = 2, y'(0) = 1.$

11.10.7 $y'' + 2y' = 2 + e^t$ $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

11.10.8 $y'' + y = 2\cos t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

11.10.9 $y'' + 4y = \sin 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Задача 11

С помощью операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющей начальным условиям $x(0) = y(0) = 0$.

11.11.0 $\begin{cases} x' + x + y = -e^{2t}, \\ y' - 2x - 2y = e^{3t}. \end{cases}$

11.11.1 $\begin{cases} x' - x - y = -e^{2t}, \\ y' + 2y + 2x = e^{t}. \end{cases}$

11.11.2 $\begin{cases} x' + x + y = e^{t}, \\ y' + 2x + 2y = e^{4t}. \end{cases}$

11.11.3 $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 2e^{t}, \\ y' - y - x = e^{2t}. \end{cases}$

11.11.4 $\begin{cases} x' - 3x - 3y = 2e^{-2t}, \\ y' + 2x + 2y = e^{-t}. \end{cases}$

11.11.5 $\begin{cases} x' + 2x + 2y = -e^{t}, \\ y' + y + x = 3e^{2t}. \end{cases}$

11.11.6 $\begin{cases} x' + x + y = e^{-2t}, \\ y' + 2x + 2y = 2e^{3t}. \end{cases}$

11.11.7 $\begin{cases} x' - 2x - 2y = e^{t}, \\ y' + 3y + 3x = 2e^{-2t}. \end{cases}$

11.11.8 $\begin{cases} x' + x + y = 2e^{2t}, \\ y' + 2x + 2y = 2e^{3t}. \end{cases}$

11.11.9 $\begin{cases} x' - 3x - 3y = 3e^{3t}, \\ y' - y - x = e^{2t}. \end{cases}$

Задача 12

Методом Даламбера найти уравнение **u=u(x,t)** формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если в начальный момент $t_0 = 0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой **x** определяются соответственно заданными функциями

$$u\big|_{t=0} = u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u'(x,0) = F(x).$$

11.12.0 $f(x) = 2e^{-x}$, $F(x) = \sin\dfrac{x}{2}$.

11.12.1 $f(x) = x(2-x)$, $F(x) = e^{-x}$.

11.12.2 $f(x) = x^2$, $F(x) = \sin x$.

11.12.3 $f(x) = e^{x}$, $F(x) = \omega x$.

11.12.4 $f(x) = \cos x$, $F(x) = \omega x$.

11.12.5 $f(x)=\sin x,\quad F(x)=v_0.$

11.12.6 $f(x)=x,\quad F(x)=\cos x.$

11.12.7 $f(x)=\sin x,\quad F(x)=\cos x.$

11.12.8 $f(x)=x(2-x),\quad F(x)=e^x.$

11.12.9 $f(x)=\cos x,\quad F(x)=v_0.$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦА

оригиналов и соответствующих им изображений

1. $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}\ (Re\,p>0)$ 1′. $1 \doteqdot \frac{1}{p}\ (Re\,p>0)$

2. $t \doteqdot \frac{1}{p^2}$ 3. $t^2 \doteqdot \frac{2}{p^3}$

4. $t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}$ 5. $e^{\lambda t} \doteqdot \frac{1}{p-\lambda}\ (Re\,p>Re\,\lambda)$

6. $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ 7. $\cos\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$

8. $\mathrm{sh}\,\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ 9. $\mathrm{ch}\,\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2-\omega^2}$

ТАБЛИЦА

свойств оригиналов и изображений

1. Линейность: $\left[f_1(t)\doteqdot F_1(p),\quad f_2(t)\doteqdot F_2(p)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\forall\,\lambda_1,\lambda_2\in C\quad \lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)\doteqdot \lambda_1 F_1(p)+\lambda_2 F_2(p)\right]$$

2. Подобие: $\left[f(t)\doteqdot F(p)\right] \Rightarrow \left[\forall\alpha\quad f(\alpha t)\doteqdot\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\right]$

3. Поведение изображения при $Re\,p\to\infty$:

$$[F(p)\doteqdot f(t)\ \Rightarrow\ \lim_{Re\,p\to\infty}F(p)=0]$$

4. Дифференцирование оригинала: $f(t)\doteqdot F(p)\ \Rightarrow$

$$f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0)\ ;$$

$$f''(t)\doteqdot p^2F(p)-pf(0)-f'(0);$$

$$f'''(t)\doteqdot p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0);$$

....

$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

5. Дифференцирование изображения:

$$\left[f(t)\doteqdot F(p)\right]\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}F'(p)\doteqdot -t\cdot f(t);\\ \cdot\\ F^{(n)}(p)\doteqdot(-t)^n\cdot f(t)\end{array}\right];$$

6. Интегрирование оригинала:

$$\left[f(t)\doteqdot F(p)\right]\ \Rightarrow\ \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\doteqdot\frac{F(p)}{p}\right].$$

7. Интегрирование изображения:

$$\left[f(t)\doteqdot F(p),\ \int_p^\infty F(q)dq\ \text{сходится}\right]\Rightarrow\left[\int_p^\infty F(q)dq\doteqdot\frac{f(t)}{t}\right]$$