

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №5

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь

5.1.0 a) $(1+e^x)y' = ye^x$; b) $5y'' - 6y' + 5y = e^x(2x+3)$

5.1.1 a) $\sqrt{5+y^2} + 4y'(x^2y+y) = 0$;

b) $y'' + 2y' + 5y = e^x(x^2 + 6x + 1)$

5.1.2 a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^3 + 2x^2y}{x^3 + 2xy^2}$; b) $y'' - 5y' + 6y = e^x(x^2 + x + 1)$

5.1.3 a) $3y'(x^2y+y) + \sqrt{2+y^2} = 0$; b) $y'' - y' - 2y = e^x(7x+2)$

5.1.4 a) $x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2} + y$; b) $y'' + 2y' + y = e^{2x}(18x+21)$

5.1.5 a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x-y}$; b) $y'' - 8y' + 17y = e^x(1-2x)$

5.1.6 a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$; b) $y'' + 2y' + 26y = e^x(3-2x)$

5.1.7 a) $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$; b) $y'' - 3y' = 2\cos 3x$

b) $2y'' - 5y' + 2y = e^{-x}(16-12x)$

5.1.8 a) $x \frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$; b) $y'' + 4y = -8\cos x + \sin x$

$$5.1.9 \quad a) (1+e^x) \frac{1}{\cos^2 y} y' + 3e^x \operatorname{tg} y = 0;$$

$$b) y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x$$

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють заданим початковим умовам.

$$5.2.0 \quad a) y'' = \frac{4}{\sin^2 x}; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$b^*) y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$5.2.1 \quad a) y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x; \quad y(0) = 1;$$

$$b^*) x y'' - 2y' + \frac{2}{x^2} = 0; \quad y(1) = \frac{3}{2}; \quad y'(1) = \frac{1}{2}$$

$$5.2.2 \quad a) x y' + y = x y^2; \quad y(1) = 1$$

$$b^*) y''(1-y) + 2(y')^2 = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 1$$

$$5.2.3 \quad a) 2(y' + xy) = (x+1)y^2 e^{-x}; \quad y(0) = 2;$$

$$b^*) (1+x^2)y'' + 2xy' = 2x(x^2+1); \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$$

$$5.2.4 \quad a) 2xy' - 3y + (20x^2 + 12)y^3 = 0; \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$b^*) 2y y'' = (y')^2; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 2$$

$$5.2.5 \quad a) y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}; \quad y(3) = 1;$$

$$b^*) (x^2 - 1)y'' - 2xy' = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -3$$

$$5.2.6 \quad a) y' + 2xy = 2x^3 y^3; \quad y(0) = \sqrt{2};$$

$$b^*) y'' = \sqrt{(y')^2 - 1}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$$

$$5.2.7 \quad a) \quad y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x; \quad y(2\pi) = 1$$

$$b^*) \quad y'' - \frac{1}{x} y' = 2x \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$5.2.8 \quad a) \quad 2y' - 3y \cos x = e^{-2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}; \quad y(0) = 1$$

$$b^*) \quad y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0; \quad y(2) = 1; \quad y'(2) = \frac{1}{2}$$

$$5.2.9 \quad a) \quad y' + \frac{2y}{x} + x^4 y^3 e^x = 0; \quad y(1) = 1;$$

$$b^*) \quad xy'' + y' = \sqrt{x}; \quad y(1) = \frac{4}{9}; \quad y'(1) = \frac{5}{3}$$

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, і виділити частинний розв'язок цієї системи, що задовольняє заданим початковим умовам.

$$5.3.0 \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + z \\ \frac{dz}{dt} = 3y + z \end{cases}; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 1$$

$$5.3.1 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = -2x + 4z \end{cases}; \quad x(0) = 0; \quad z(0) = -1$$

$$5.3.2 \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 3y - z \\ \frac{dz}{dt} = 10y - 4z \end{cases} ; \quad y(0) = 1; \quad z(0) = 5$$

$$5.3.3 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases} ; \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 1$$

$$5.3.4 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases} ; \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 3$$

$$5.3.5 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases} ; \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 1$$

$$5.3.6 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases} ; \quad x(0) = -1; \quad y(0) = 1$$

$$5.3.7 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases} ; \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 2$$

$$5.3.8 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 11y \end{cases}; \quad x(0) = -1; \quad y(0) = -1$$

$$5.3.9 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}; \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0$$

Завдання 4 Дослідити числові ряди на збіжність, використовуючи:

- 1) необхідну ознаку збіжності, якщо це можливо;
- 2) достатні ознаки збіжності для числових рядів з додатніми членами;
- 3) ознаку Лейбніца для знакопереміжних рядів, ці ж збіжні ряди дослідити на абсолютну та умовну збіжність.

$$5.4.0 \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}; \quad \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$$

$$5.4.1 \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^n; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$5.4.2 \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{9n^2 + 1}$$

$$5.4.3 \quad \text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2 + 1}}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$5.4.4 \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{10^3 n+3}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$$

$$5.4.5. \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{2^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+2}}$$

$$5.4.6 \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}; \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n+1}}$$

$$5.4.7 \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$5.4.8 \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 2^n}{(2n-1)!}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2n}$$

$$5.4.9 \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2(2n+1)}$$

Завдання 5. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.

$$5.5.0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n; \quad 5.5.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}; \quad 5.5.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}};$$

$$5.5.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}; \quad 5.5.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) 3^{n-1} x^{n-1};$$

$$5.5.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}; \quad 5.5.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{4^n}; \quad 5.5.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot x^n}{n!};$$

$$5.5.8 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}; \quad 5.5.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

Завдання 6. Знайти перші чотири членів розвинення функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 :

$$\begin{aligned}
5.6.0 \quad f(x) &= e^{\operatorname{arctg} x}, \quad x_0 = 0; & 5.6.1 \quad f(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad x_0 = 1; \\
5.6.2 \quad f(x) &= e^{\cos x}, \quad x_0 = 0; & 5.6.3 \quad f(x) &= \frac{1}{\cos x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \\
5.6.4 \quad f(x) &= x e^{x^2}, \quad x_0 = 1; & 5.6.5 \quad f(x) &= x^3 \ln x, \quad x_0 = 1; \\
5.6.6 \quad f(x) &= x^2 e^{2x}, \quad x_0 = 1; & 5.6.7 \quad f(x) &= \ln(\sin x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \\
5.6.8 \quad f(x) &= \frac{x^2}{1-x}, \quad x_0 = 2; & 5.6.9 \quad f(x) &= (2x+1) \ln x, \quad x_0 = 1;
\end{aligned}$$

Завдання 7*. Використовуючи розвинення елементарних функцій, розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$ і знайти область збіжності отриманого ряду:

$$\begin{aligned}
5.7.0^* \quad f(x) &= \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}; & 5.7.1^* \quad f(x) &= x \sin 5x; \\
5.7.2^* \quad f(x) &= \sqrt[4]{16-5x}; & 5.7.3^* \quad f(x) &= x^2 \sqrt{4-3x}; \\
5.7.4^* \quad f(x) &= \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}; & 5.7.5^* \quad f(x) &= x \sin^2 x; \\
5.7.6^* \quad f(x) &= 2x \cos^2 \frac{x}{2} - x; & 5.7.7^* \quad f(x) &= \frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x; \\
5.7.8^* \quad f(x) &= \cos^2 x + \frac{1}{1-x^2}; & 5.7.9^* \quad f(x) &= \frac{x}{\sqrt[3]{8-x}};
\end{aligned}$$

Завдання 8. Знайти перші чотири члена розвинення в ряд Тейлора розв'язку задачі Коші:

$$5.8.0 \quad y' + y \cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0, \quad y(0) = 1;$$

$$5.8.1 \quad y'' = xy y', \quad y(0) = 1, \quad y'(\pi) = 1;$$

$$5.8.2 \quad y'' = e^y \sin y', \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = \frac{\pi}{2};$$

$$5.8.3 \quad y' = 2x + \cos y, \quad y(0) = 0;$$

$$5.8.4 \quad y'' = (y')^2 + xy, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2;$$

$$5.8.5 \quad y' = 2 \cos x - xy^2, \quad y(0) = 1;$$

$$5.8.6 \quad y'' - y' - x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$5.8.7 \quad y' - y \cos^2 x + y^2 \sin x - \ln(x + y) = 0, \quad y(0) = 3;$$

$$5.8.8 \quad 2y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0, \quad y(0) = 2;$$

$$5.8.9 \quad y'' + xy' + \frac{y}{1-x} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

Завдання 9. Використовуючи функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ та відоме число a , знайти:

а) розвинення в ряд Фур'є 2π -періодичної функції

$$F_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ f_2(x) & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases};$$

побудувати графіки функції $F_1(x)$ та суми отриманого ряду;

б*) розвинення в ряди синусів та косинусів функції

$f_1(x)$ на відрізку $[0, a]$;

с*) побудувати графіки отриманих рядів.

$$5.9.0 \quad f_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}; \quad f_2(x) = 0; \quad a = \frac{5}{2};$$

$$5.9.1 \quad f_1(x) = 2x - 4; \quad f_2(x) = -2; \quad a = 2;$$

$$5.9.2 \quad f_1(x) = -x + 3; \quad f_2(x) = 1; \quad a = 1;$$

$$5.9.3 \quad f_1(x) = -x + 1; \quad f_2(x) = -1; \quad a = 4;$$

$$5.9.4 \quad f_1(x) = x - 3; \quad f_2(x) = 3; \quad a = 2;$$

$$5.9.5 \quad f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1; \quad f_2(x) = -3; \quad a = \frac{3}{2};$$

$$5.9.6 \quad f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 1; \quad f_2(x) = \frac{1}{2}; \quad a = 3;$$

$$5.9.7 \quad f_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}; \quad f_2(x) = -\frac{1}{3}; \quad a = 2;$$

$$5.9.8 \quad f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2; \quad f_2(x) = -1; \quad a = \frac{5}{2};$$

$$5.9.9 \quad f_1(x) = x + 2; \quad f_2(x) = -2; \quad a = 1;$$