МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ,МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к курсовой работе
по курсу
“ Математические основы теории систем ”

для студентов специальности 7 091 401
дневной и заочной форм обучения

ОДЕССА ОНПУ - 2011

Методические указания к курсовой работе по курсу “Математические основы теории систем” для студентов специальности 7 091 401 дневной и заочной форм обучения / Сост. С. А. Бобриков, Г.Г.Андриевский - Одесса: ОНПУ, 2011.

Составители: С. А. Бобриков, Г.Г.Андриевский

кандидаты техн. наук, доценты

1. Цель работы

Целью настоящей работы является усвоение студентами методов определения основных вероятностных характеристик стационарного случайного процесса, а также приобретение практических навыков расчета стационарных линейных систем автоматического управления, работающих при случайных входных сигналах.

Исходными данными для расчета выборки, соответствующей полезному случайному сигналу, действующему на входе системы, являются числа, приведенные в табл.1. Каждый студент, приступая к выполнению задания, должен составить индивидуальную таблицу исходных данных по следующему правилу. Каждое число табл. 1. умножается на один и тот же коэффициент K, который рассчитывается по следующей формуле:

$$K = 1 + 0{,}01(A + B + C),$$

где A, B, C - соответственно номера первых букв фамилии, имени и отчества студента в русском алфавите. Например, студент Иван Петрович Сидоров. Номера первых букв соответственно равны: И - 10, П - 17, С - 19,

$$K = 1 + 0{,}01(10 + 17 + 19) = 1{,}46 .$$

Полученные таким образом числа записываются в табл. 2. Эти числа следует понимать, как значения случайного процесса, полученные через равные промежутки времени Δt, равные 1 с.

Таблица 1

№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n
1	1,8	21	-0,97	41	0,15	61	1,8	81	-1,63
2	1,85	22	-0,92	42	0	62	1,72	82	-1,85
3	1,52	23	-0,84	43	-0,1	63	1,65	83	-1,94
4	1,25	24	-0,81	44	-0,32	64	1,54	84	-2,02
5	1,05	25	-0,6	45	-0,5	65	1,42	85	-1,96
6	0,84	26	-0,52	46	-0,62	66	1,3	86	-1,85
7	0,8	27	-0,5	47	-0,6	67	1,2	87	-1,74
8	0,76	28	-0,42	48	-0,54	68	1,02	88	-1,67
9	0,71	29	-0,51	49	-0,4	69	0,95	89	-1,63
10	0,5	30	-0,6	50	-0,2	70	0,84	90	-1,25
11	0,4	31	-0,64	51	-0,12	71	0,52	91	-0,86
12	0	32	-0,82	52	0	72	0,26	92	-0,25
13	-0,21	33	-0,8	53	0,54	73	0	93	0
14	-0,35	34	-0,65	54	1,0	74	-0,12	94	0,53
15	-0,56	35	-0,28	55	1,2	75	-0,24	95	0,72
16	-0,8	36	-0,15	56	1,4	76	-0,25	96	1,24
17	-0,92	37	0,25	57	1,5	77	-0,46	97	1,46
18	-1,0	38	0,4	58	1,6	78	-0,83	98	1,55
19	-1,4	39	0,38	59	1,7	79	-1,05	99	1,64
20	-1,2	40	0,27	60	1,74	80	-1,24	100	1,72

Продолжение табл. 1

№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n	№№ п/п	g_n
101	1,7	121	-0,95	141	0,45	161	-0,8	181	0,61
102	1,6	122	-1,1	142	0,56	162	-0,9	182	0,45
103	1,4	123	-1,3	143	0,71	163	-1,1	183	0,38
104	1,3	124	-1,1	144	0,85	164	-0,8	184	0,23
105	0,95	125	-0,8	145	0,9	165	-0,5	185	0,15
106	0,8	126	-0,56	146	0,92	166	-0,3	186	0,16
107	0,9	127	-0,44	147	0,93	167	-0,1	187	0,21
108	1,2	128	-0,24	148	0,9	168	0	188	0,25
109	1,1	129	-0,1	149	0,78	169	0,1	189	0,25
110	0,85	130	-0,2	150	0,5	170	0,25	190	0,26
111	0,5	131	-0,34	151	0,2	171	0,38	191	0,35
112	0,34	132	-0,11	152	0,14	172	0,56	192	0,5
113	0,28	133	0	153	0,08	173	0,72	193	0,7
114	0,12	134	0,15	154	0,05	174	0,8	194	0,8
115	0	135	0,4	155	-0,11	175	0,82	195	0,9
116	-0,2	136	0,5	156	-0,23	176	0,85	196	1,1
117	-0,45	137	0,55	157	-0,4	177	0,81	197	1,2
118	-0,56	138	0,62	158	-0,5	178	0,74	198	1,2
119	-0,8	139	0,48	159	-0,7	179	0,65	199	1,12
120	-0,92	140	0,32	160	-0,7	180	0,63	200	0,9

2. Содержание курсовой работы

2.1. Заполнить табл. 2, умножая все числа табл. 1 на коэффициент K.

2.2. Рассчитать статистическую корреляционную функцию $R_g*(\tau)$ случайного процесса $g(t)$. Расчет проводить на ЭВМ. Программа расчета на языке MATLAB приведена в прил. 2. Привести график функции $R_g*(\tau)$.

2.3. Аппроксимировать статистическую корреляционную функцию $R_g*(\tau)$ случайного процесса $g(t)$ рекомендуемым аналитическим выражением

$$R_g(\tau) = R_0 e^{-\mu|\tau|}\cos\beta\tau .$$

Определить параметры функции R_0, μ, β.

2.4. Вычертить в одних и тех же координатах графики функций $R_g*(\tau)$ и $R_g(\tau)$. Сделать вывод о точности аппроксимации.

2.5. Найти аналитическое выражение для спектральной плотности $S_g(\omega)$ стационарного случайного процесса $g(t)$, применив преобразование Фурье для функции $R_g(\tau)$.

2.6. По заданной структурной схеме системы автоматического управления определить передаточные функции замкнутой системы, связывающее ошибку системы с полезным входным сигналом и с помехой, приложенной к входу системы.

2.7. Считая, что помеха представляет собой случайный процесс с корреляционной функцией вида

$$R_f(\tau) = D_f e^{-\varphi|\tau|}$$

и что корреляция между полезным сигналом и помехой отсутствует, определить оптимальное значение коэффициента усиления системы K_C, соответствующее минимуму дисперсии ошибки системы.

При расчете принять следующие числовые значения параметров:

$$D_f = 0{,}5K; \quad \varphi = 0{,}05K; \quad T = 0{,}5K.$$

2.8. Определить дисперсию ошибки при условии, что коэффициент усиления системы равен оптимальному.

2.9. Сделать выводы.

3. Краткие теоретические сведения

3.1. Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса

Корреляционная функция (автокорреляционная функция) стационарного случайного процесса $g(t)$ определяется следующим выражением:

$$R_g(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t)g(t+\tau)dt. \qquad (1)$$

При $\tau = 0$ значение корреляционной функции равно среднему квадрату случайного процесса

$$R_g(0) = \overline{g^2}. \qquad (2)$$

Спектральной плотностью случайного процесса $g(t)$ называется вещественная функция частоты $Sg(\omega)$, определяющаяся выражением:

$$S_g(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left|G_g(j\omega)\right|^2, \qquad (3)$$

где $G_g(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt$ - изображение Фурье функции $g(t)$.

Имеет место следующая зависимость:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega)d\omega = \overline{g^2}. \qquad (4)$$

Спектральная плотность и корреляционная функция связаны между собой взаимным преобразованием Фурье:

$$S_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \qquad (5)$$

$$R_g(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_g(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\,. \qquad (6)$$

Таким образом, имея аналитическое выражение для корреляционной функции изучаемого процесса, можно с помощью формулы (5) прямого преобразования Фурье найти формулу для спектральной плотности и наоборот, по спектральной плотности с помощью обратного преобразования Фурье (6) можно получить выражение для корреляционной функции.

3.2. Статистическая корреляционная функция и ее аппроксимация

При экспериментальном исследовании случайного процесса первичным материалом является выборка, представляющая дискретные значения процесса, взятые через постоянные интервалы времени Δt. Пусть весь интервал времени наблюдения процесса равен T. Разделим этот интервал на N равных частей Δt, тогда $N\Delta t=T$. Непрерывное время t заменим дискретными значениями $t=i\Delta t$, где $i=1,2,3,..,N$. Непрерывное время τ (аргумент корреляционной функции) представим как $\tau=k\Delta t$, где $k=0,1,2,3,...$ Значения случайного процесса в дискретные моменты времени обозначим $g(i\Delta t)=g_i$, а значения корреляционной функции - через $R_g(k\Delta t)=R_g(k)$. Дискретные значения корреляционной функции могут быть приближенно определены по формуле

$$R_g*(k)=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}g_i g_{i+k}\,. \qquad (7)$$

Функция $R_g*(k)$ называется статистической корреляционной функцией. Она лишь приближенно соответствует действительной корреляционной функции, определяемой формулой (1). В формуле (1) интервал наблюдения $T\to\infty$, а в реальной выборке N всегда конечно. Чем больше N, тем меньше погрешность определения $R_g(\tau)$.

Вычисления по формуле (7) следует выполнять на ЭВМ. Значения K изменять от 0 до 40, $N=200$. Результаты вычислений вписать в табл. 3.

Таблица 3

K	0	1	2	3	...	...	39	40
$R_g*(k)$								

Другой важной характеристикой случайного процесса является его математическое ожидание (среднее значение). Оценка математического ожидания процесса по его выборке определяется по формуле

$$\bar{g}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_i\,. \qquad (8)$$

В зависимости от характера случайного процесса его статистическая корреляционная функция может быть приближенно аппроксимирована одним из следующих выражений:

$$R_g(\tau)_1 = R_0 e^{-\mu|\tau|}, \tag{9}$$

$$R_g(\tau)_2 = R_0 e^{-\mu|\tau|} \cos\beta\tau, \tag{10}$$

$$R_g(\tau)_3 = R_0 e^{-\mu|\tau|} (\cos\beta\tau + a\sin\beta|\tau|). \tag{11}$$

Используются и другие выражения.

Следует иметь в виду, что график $R_g{}^*(\tau)$, полученный обработкой некоторой реализации конечной длительности, содержит элемент случайности, который может оказать существенное влияние при больших τ. Поэтому следует добиваться хорошего совпадения экспериментальной и аналитической кривых прежде всего на начальном участке значений аргумента до τ_m, начиная

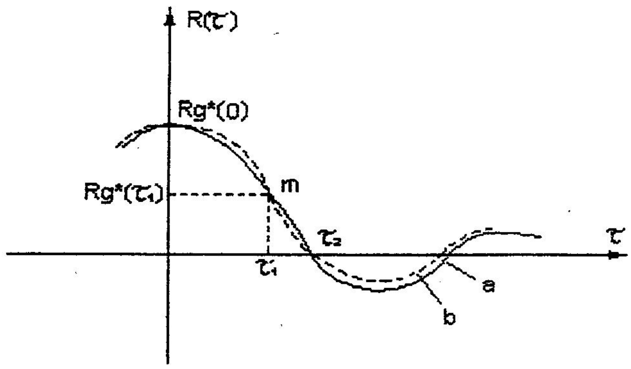


Рис. 1. a) Статистическая корреляционная функция;
b) ее аппроксимация

с которого, $R_g(\tau)$ не выходит за пределы $(0{,}3\text{-}0{,}5)\,R_g(0)$.

По виду графика $R_g{}^*(\tau)$ следует выбрать соответствующую аппроксимирующую функцию, а затем определить ее параметры таким образом, чтобы графики $R_g{}^*(\tau)$ и $R_g(\tau)$ максимально совпадали.

Наиболее качественным методом определения неизвестных значений параметров является метод наименьших квадратов, однако его использование требует сложных вычислений. В данной курсовой работе рекомендуется определить неизвестные параметры аппроксимирующего выражения из условия равенства его ординат кривой $R_g{}^*(\tau)$ в некоторых характерных точках. Такими могут быть, например, $\tau = 0$; значения τ при которых $R_g{}^*(\tau) = 0$ и др.

Рассмотрим пример. Пусть $R_g{}^*(\tau)$ имеет вид, как показано на рис. 1. Для аппроксимации этого графика выберем формулу (10).

Необходимо определить параметры R_0, μ, β. Очевидно $R_0 = R_g{}^*(0)$. Пусть первое пересечение графиком $R_g{}^*(\tau)$ оси абсцисс происходит в точке τ_2 (рис.1). Тогда $\beta\tau_2 = \pi / 2$, откуда следует $\beta = \pi / 2\tau_2$. Для определения μ выберем произвольную точку m на начальном участке кривой $R_g *(\tau)$. Пусть координаты точки m соответственно равны $(\tau_m, R_g *(\tau_m))$. Подставим эти координаты в формулу аппроксимирующей функции:

$$R_g *(\tau_m) = R_0 e^{-\mu\tau_m} \cos\beta\tau_m .$$

Из последнего уравнения следует

$$\mu = \frac{1}{\tau_m} \ln \frac{R_0 \cos\beta\tau_m}{R_g *(\tau_m)} .$$

3.3. Определение спектральной плотности случайного процесса по его корреляционной функции

Если известно аналитическое выражение корреляционной функции стационарного случайного процесса, то его спектральную плотность можно получить, произведя преобразование Фурье над корреляционной функцией (5).

Для случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид (10), спектральная плотность:

$$S_g(\omega) = \mu R_0 \left[\frac{1}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2} \right]. \tag{12}$$

При использовании (21) следует (12) преобразовать таким образом:

$$S_g(\omega) = \mu R_0 \frac{\mu^2 + (\beta + \omega)^2 + \mu^2 + (\beta - \omega)^2}{\left[\mu^2 + (\beta - \omega)^2\right]\left[\mu^2 + (\beta + \omega)^2\right]} =$$

$$= 2\mu R_0 \frac{-(j\omega)^2 + \mu^2 + \beta^2}{\left[(j\omega)^2 + 2\mu j\omega + \mu^2 + \beta^2\right]\left[(-j\omega)^2 - 2\mu j\omega + \beta^2 + \mu^2\right]}.$$

3.4. Прохождение стационарного случайного сигнала через линейную систему

Пусть на входе линейной стационарной системы действует стационарный случайный сигнал $x(t)$. На выходе системы в установившемся режиме будет также стационарный сигнал $y(t)$. При расчете системы, работающей в режиме случайных сигналов, определяют дисперсию и среднее значение выходного сигнала и ошибки системы.

Стационарная линейная система описывается дифференциальным уравнением вида

$$a_0 y(t)^{(n)} + a_1 y(t)^{(n-1)} + ... + a_n y(t) = b_0 x(t)^{(m)} + ... + b_m x(t), \qquad (13)$$

где $x(t)$ - входной сигнал; $y(t)$ - выходной сигнал, $a_0, a_1, ..., a_n, b_0, ..., b_m$ - постоянные коэффициенты.

Применим операцию преобразования Лапласа к уравнению (13), приняв нулевые начальные условия:

$$(a_0 P^n + a_1 P^{n-1} + ... + a_n) Y(P) = (b_0 P^m + b_1 P^{m-1} + ... + b_m) X(P), \qquad (14)$$

где $Y(P) = \int\limits_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$, $X(P) = \int\limits_0^\infty x(t) e^{-pt} dt$ - изображения Лапласа функций $x(t)$ и $y(t)$.

Отношение $Y(P)/X(P) = K(P)$ - называется передаточной функцией системы. Из (14) следует, что

$$K(P) = \frac{b_0 P^m + b_1 P^{m-1} + ... + b_m}{a_0 P^n + a_1 P^{n-1} + ... + a_n} = \frac{Y(P)}{X(P)}.$$

Формально передаточную функцию системы (звена) по ее дифференциальному уравнению можно получить не прибегая к преобразованию Лапласа. Для этого достаточно записать дифференциальное уравнение в операторной форме, т. е. Заменить символ дифференцирования d/dt оператором дифференцирования P, а затем найти отношение выходной величины к входной. При этом получается выражение, совпадающее с передаточной функцией с точностью до обозначения P. В передаточной функции $P = \sigma + j\omega$ - оператор преобразования Лапласа, во втором случае P - оператор дифференцирования.

При подстановке в передаточную функцию $P = j\omega$ получим комплексную передаточную функцию, представляющую собой отношение изображения Фурье выходного сигнала к изображению Фурье входного сигнала системы:

$$K(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + ... + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + ... + a_n} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}, \qquad (15)$$

где $Y(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$, $X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$.

Из (15) следует:

$$Y(i\omega) = K(j\omega) \cdot X(j\omega).$$

Возьмем модули левой и правой частей последнего выражения, возведем их в квадрат, разделим на $2T$ и перейдем к пределу при $T \to \infty$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |Y(j\omega)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |K(j\omega) X(j\omega)|^2.$$

Откуда следует:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |Y(j\omega)|^2 = |K(j\omega)|^2 \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |X(j\omega)|^2$$

или

$$S_y(\omega) = |K(j\omega)|^2 S_x(\omega). \tag{16}$$

При известной передаточной функции системы $K(P)$ и известной спектральной плотности $S_x(\omega)$ стационарного случайного сигнала $x(t)$, действующего на входе системы, по (16) можно найти спектральную плотность стационарного случайного сигнала на выходе системы. Если в (16) вместо комплексной передаточной функции, связывающей входной сигнал с выходным, подставить комплексную передаточную функцию, которая связывает входной сигнал с ошибкой системы, то можно определить спектральную плотность ошибки системы.

Дисперсия сигнала может быть определена как разность между средним квадратом и квадратом среднего:

$$D_y = \overline{y^2} - (\overline{y})^2.$$

Если постоянная составляющая сигнала равна нулю, то

$$D_y = \overline{y^2}.$$

Подставляя (16) в (4) получим

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \tag{17}$$

Подынтегральное выражение в (17) имеет вид $\dfrac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2}$, где $A(j\omega)$ и $B(j\omega)$ представляют собой полиномы от комплексной переменной $j\omega$. Обозначим наивысшую степень знаменателя через $2n$. Наивысшая степень числителя для реальных систем может быть не более $2n-2$. Для интегрирования по (17) подынтегральное выражение представляют в следующей форме:

$$\frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} = \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} = \tag{18}$$

$$= \frac{b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + ... + b_{n-1}}{\left[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + ... + a_n\right]\left[a_0(-j\omega)^n + a_1(-j\omega)^{n-1} + ... + a_n\right]},$$

откуда

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{A(j\omega) \cdot A(-j\omega)} d\omega = I_n. \tag{19}$$

Интегралы I_n для различных значений n (степень полинома $A(j\omega)$) приведены в справочниках и учебниках по теории автоматического управления. Значения I_n для n от 1 до 5 приведены в прил. 1.

Математическое ожидание m_y стационарного случайного сигнала $y(t)$ на выходе линейной стационарной системы с передаточной функцией $K(P)$

связано с математическим ожиданием m_x стационарного случайного сигнала $x(t)$ на входе системы следующей формулой:

$$m_y = K(0)m_x,\ \text{где}\ K(0) = K(P)\ \text{при}\ P = 0.$$

Рассмотрим пример. На вход линейной стационарной системы, описываемой уравнением $3y'(t) + y(t) = 4x'(t) + x(t)$, подается стационарная случайная функция $x(t)$ с корреляционной функцией $R_x(\tau) = 6e^{-2|\tau|}$ и математическим ожиданием $m_x = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной функции $y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Решение. Уравнение системы в операторной форме:

$$(3P+1)y(P) = (4P+1)X(P).$$

Передаточная функция системы:

$$K(P) = \frac{4P+1}{3P+1}.$$

Математическое ожидание выходного сигнала:

$$m_y = m_x \frac{4\cdot 0+1}{3\cdot 0+1} = m_x = 0.$$

Комплексная передаточная функция системы:

$$K(j\omega) = \frac{4j\omega+1}{3j\omega+1}.$$

Спектральная плотность входного сигнала:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 6e^{-2|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau = 6\int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau + 6\int_{0}^{\infty} e^{-2\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

$$= 6\int_{-\infty}^{0} e^{\tau(2-j\omega)}d\tau + 6\int_{0}^{\infty} e^{-\tau(2+j\omega)}d\tau = = \frac{6}{2-j\omega}e^{\tau(2-j\omega)}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{6}{2+j\omega}e^{-\tau(2+j\omega)}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{6}{2-j\omega} + \frac{6}{2+j\omega} = \frac{24}{(2+j\omega)(2-j\omega)}.$$

Спектральная плотность выходного сигнала:

$$S_y(\omega) = \left|\frac{1j\omega+1}{3j\omega+1}\right|^2 \frac{24}{(2+j\omega)(2-j\omega)} =$$

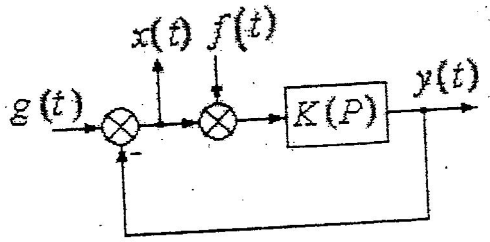
$$= \frac{(16\omega^2+1)\cdot 24}{(3j\omega+1)(-3j\omega+1)(2+j\omega)(2-j\omega)} =$$

$$= 24\frac{-16(j\omega)^2+1}{[3(j\omega)+7(j\omega)+2][3(-j\omega)+7(-j\omega)+2]}.$$

Здесь $n=2$, $a_0=3$, $a_1=7$, $a_2=2$, $b_0=-16$, $b_1=1$.

Находим средний квадрат (дисперсию) выходного сигнала по формуле I_2 (см. прил. 1):

$$D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = 24I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1} = 24\frac{16 + \frac{3\cdot 1}{2}}{2\cdot 3\cdot 7} = 10$$



$K(p) = \frac{K_c}{0{,}5KP+1}$

Рис. 2. Структурная схема системы.

3.5. **Расчет системы на минимум дисперсии ошибки**

Пусть структурная схема системы имеет вид, как показано на рис. 2. Передаточная функция разомкнутой системы равна $K(P)$.
На входе системы действуют случайные не коррелированные между собой сигналы: полезный сигнал $g(t)$ (этот сигнал система должна воспроизвести без искажений на выходе) и случайная помеха $f(t)$ (которая тоже попадает на выход системы и искажает выходной сигнал).

Ошибка системы $\quad x(t) = g(t) - y(t)$.

При расчете системы следует добиваться того, чтобы сигнал $x(t)$ был минимальным (в идеальном случае $x(t) = 0$).

Передаточные функции замкнутой системы, связывающие выходную величину с полезным входным сигналом и ошибку с полезным входным сигналом, имеют вид

$$W(P) = \frac{K(P)}{1+K(P)} = \frac{Y(P)}{G(P)}, \tag{20}$$

$$\Phi(P) = \frac{I}{1+K(P)} = \frac{X(P)}{G(P)}. \tag{21}$$

При действии на входе системы полезного сигнала $g(t)$ и помехи $f(t)$ ошибка системы определяется формулой

$$X(P) = G(P)\cdot\Phi(P) + F(P)\cdot W(P). \tag{22}$$

При отсутствии корреляции между полезным сигналом и помехой спектральная плотность ошибки системы может быть подсчитана по формуле

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |W(j\omega)|^2 S_f(\omega) =$$

$$=\left|\frac{1}{1+K(j\omega)}\right|^2 S_g(\omega)+\left|\frac{K(j\omega)}{1+K(j\omega)}\right|^2 S_f(\omega). \tag{23}$$

Для определения дисперсии ошибки воспользуемся формулой

$$D_x=\overline{X_2}-(\overline{X})^2,$$

где

$$\overline{X_2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+K(j\omega)}\right|^2 S_g(\omega)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{K(j\omega)}{1+K(j\omega)}\right|^2 S_f(\omega)d\omega. \tag{24}$$

Расчеты по этой формуле следует проводить, пользуясь выражением (19) и таблицами интегралов I_n (см. прил. 1).

Для определения среднего значения ошибки следует воспользоваться (22), в которую подставить вместо $G(P)$ и $F(P)$ математические ожидания случайных сигналов $g(t)$ и $f(t)$, а в передаточные функции вместо P подставить 0:

$$\overline{x}=\overline{g}\Phi(0)+\overline{f}W(0)=\overline{g}\frac{1}{1+K(0)}+\overline{f}\frac{K(0)}{1+K(0)}.$$

При расчете системы на минимум дисперсии ошибки следует искать такое значение варьируемого параметра, при котором $D_x=D_{x\min}$.

Литература

Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1972. - 767 с.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ I_n

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(j\omega)d\omega}{A(j\omega)A(-j\omega)},$$

где $A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n$,

$G(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \ldots + b_{n-1}$.

$$I_1 = b_0 / 2a_0a_1 .$$

$$I_2 = \frac{-b_0 + a_0b_1 / a_2}{2a_0a_1} .$$

$$I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - a_0a_1b_2 / a_3}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)} .$$

$$I_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0b_2a_1 + a_0b_3(a_0a_3 - a_1a_2) / a_4}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)} .$$

$$I_5 = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5}$$

$$M_5 = b_0(-a_0a_4a_5 + a_1a_4^2 + a_2^2a_5 - a_2a_3a_4) + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) +$$
$$+ a_0b_2(a_0a_5 - a_1a_4) + a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) +$$
$$+ \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3) ,$$

$$\Delta_5 = a_0^5a_5^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + a_1^2a_4^2 +$$
$$+ a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4 .$$

Приложение 2

Программа №1. Расчет и построение статистической корреляционной функции по экспериментальным данным. Имя файла - Rst.m

```
'Расчет и построение графика статистической корреляционной функции'
G=[1.8  1.85  1.52  1.25  1.05  .84  .8  .76 .71  .5...
 .4   0  -.21  -.35  -.56   -.8  -.92 -1  -1.4 -1.2 ...
-.97 -.92  -.84  -.81  -.6   -.52 -.5 -.42 -.51 -.6 ...
  -.64 -.82 -.8 -.65 -.28 -.15 .25 .4 .38 .27 ...
  .15 0 -.1 -.32 -.5 -.62 -.6 -.54 -.4 -.2...
  -.12 0 .54 1 1.2 1.4 1.5 1.6 1.7 1.74...
  1.8 1.72 1.65 1.54 1.42 1.3 1.2 1.02 .95 .84...
  .52 .26 0 -.12 -.24 -.25 -.46 -.83 -1.05 -1.24...
  -1.63 -1.85 -1.94 -2.02 -1.96 -1.85 -1.74 -1.67 -1.63 -1.25...
  -.86 -.25 0 .53 .72 1.24 1.46 1.55 1.64 1.72...
  1.7 1.6 1.4 1.3 .95 .8 .9 1.2 1.1 .85...
 .5 .34 .28 .12 0 -.2 -.45 -.56 -.8 -.92...
 -.95 -1.1 -1.3 -1.1 -.8 -.56 -.44 -.24 -.1 -.2...
 -.34 -.11 0 .15 .4 .5 .55 .62 .48 .32...
 .45 .56 .71 .85 .9 .92 .93 .9 .78 .5...
 .2 .14 .08 .05 -.11 -.23 -.4 -.5 -.7 -.7...
 -.8 -.9 -1.1 -.8 -.5 -.3 -.1 0 .1 .25...
 .38 .56 .72 .8 .82 .85 .81 .74 .65 .63...
 .61 .45 .38 .23 .15 .16 .21 .25 .25 .26...
 .35 .5 .7 .8 .9 1.1 1.2 1.2 1.12 .9];
 K=input('Введите значение K=')
 for j=1:200;
    KG(j)=G(j).*K;
 end
 i=1:200;
 'KG(i)'
 KG(i)
 for k=1:1:41;
    S(k)=0;
    for i=1:1:200-k+1;
       S(k)=S(k)+KG(i).*KG(i+k-1);
    end
    R(k)=S(k)./(200-k+1);
 end
 for k=1:200
 S1(k)=0;
   S1(k)=S1(k)+KG(k);
end
'Среднее значение случайного процесса равно:'
KGcp=S1(k)./200
```

```
k=1:41;
'R(k)='
R(k)
R0=R(1)
plot(R);grid
title(' R*(t)')
```

Программа №2. Построение графиков корреляционной функции.
Имя файла - RstR.m.

```
'Построение корреляционной функции и аппроксимирующей кривой в одних координатах'
G=[1.8 1.85 1.52 1.25 1.05 .84 .8 .76 .71 .5...
.4 0 -.21 -.35 -.56 -.8 -.92 -1 -1.4 -1.2 ...
-.97 -.92 -.84 -.81 -.6 -.52 -.5 -.42 -.51 -.6 ...
-.64 -.82 -.8 -.65 -.28 -.15 .25 .4 .38 .27 ...
.15 0 -.1 -.32 -.5 -.62 -.6 -.54 -.4 -.2...
-.12 0 .54 1 1.2 1.4 1.5 1.6 1.7 1.74...
1.8 1.72 1.65 1.54 1.42 1.3 1.2 1.02 .95 .84...
.52 .26 0 -.12 -.24 -.25 -.46 -.83 -1.05 -1.24...
-1.63 -1.85 -1.94 -2.02 -1.96 -1.85 -1.74 -1.67 -1.63 -1.25...
-.86 -.25 0 .53 .72 1.24 1.46 1.55 1.64 1.72...
1.7 1.6 1.4 1.3 .95 .8 .9 1.2 1.1 .85...
.5 .34 .28 .12 0 -.2 -.45 -.56 -.8 -.92...
-.95 -1.1 -1.3 -1.1 -.8 -.56 -.44 -.24 -.1 -.2...
-.34 -.11 0 .15 .4 .5 .55 .62 .48 .32...
.45 .56 .71 .85 .9 .92 .93 .9 .78 .5...
.2 .14 .08 .05 -.11 -.23 -.4 -.5 -.7 -.7...
-.8 -.9 -1.1 -.8 -.5 -.3 -.1 0 .1 .25...
.38 .56 .72 .8 .82 .85 .81 .74 .65 .63...
.61 .45 .38 .23 .15 .16 .21 .25 .25 .26...
.35 .5 .7 .8 .9 1.1 1.2 1.2 1.12 .9];

K=input('Введите значение K=');
for j=1:200;
   KG(j)=G(j).*K;
end
for k=1:1:41;
   S(k)=0;
   for i=1:1:200-k+1;
      S(k)=S(k)+KG(i).*KG(i+k-1);
   end
   R(k)=S(k)./(200-k+1);
end
R0=R(1)
```

```
tau2=input ('Введите tau2=');
  beta=pi./(2*tau2)
  x=R0*cos(beta*6);
  tm=input('Введите tm=');
  y=input ('Введите R*(tm)=');
  mu=log(x./y)./6
 for k=1:41
    z(k)=R0*exp(-mu*k)*cos(beta*k);
 end
k=1:41;
plot(k,z,'k-', k,R,'k:');grid
legend 'R*(t),  ---R(t)'
```

Программа №3. График зависимости дисперсии ошибки системы управленипя от коэффициента усиления.

Имя файла - dx.m.

```
'Построение графика зависимости дисперсии ошибки от коэффициента Kc'
K=input('Введите K=')
R0=input('Введите R0=')
mu=input('Введите mu=')
beta=input('Введите beta=')
KGcp=input('Введите среднее значение сигнала KGcp(t)=')
Kc=0;dKc=0.001;
i=1;
while i<5000;
a01=0.5.*K;  a11=mu.*K+1+Kc;
a21=0.5.*K.*(mu.^2+beta.^2)+2.*mu.*(1+Kc);
a31=(1+Kc).*(mu.^2+beta.^2); b01=mu.*R0*0.5.*K.^2;
b11=-2.*mu.*R0.*((mu.^2+beta.^2).*0.25.*K.^2+1);
b21=2.*mu.*R0.*(mu.^2+beta.^2);
fi=0.05.*K; Df=0.5.*K;
a02=0.5.*K; a12=0.5.*K.^2.*fi+1+Kc;   a22=fi.*(1+Kc);
b02=0; b12=K.^2.*0.05.*Kc.^2;
I3=(-a21.*b01+a01.*b11-a01.*a11.*b21./a31)./(2.*a01.*(a01.*a31-a11.*a21));
I2=(-b02+a02.*b12./a22)./(2.*a02.*a12);
x(i)=Kc;
Dx(i)=I3+I2-(KGcp./(1+Kc)).^2;
i=i+1;
Kc=Kc+dKc;
end;
plot(x,Dx);grid
```